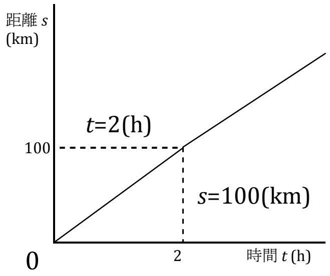
微分　[P.185]

年次　　組　　番・氏名

○ 速さ(復習)

物体が移動する速さ(平均の速さ)v は、移動距離 s を移動時間 t で割って求める($v=s/t$)。



左のグラフは、一定の速さ(平均の速さ)で移動する物体の移動［　　］と移動［　　］の関係をグラフにしたものである。移動時間が増えると移動距離も増えている様子がわかる。

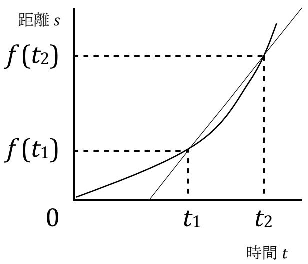
例えば、出発してから 2 時間後の移動距離が 100km であるときの平均の速さは、［　　］ km/h(=100/2)となる。すなわち平均の速さはグラフの「傾(かたむ)き」として求めることができる。

この直線の式は、$s = 50t$ となる。($y = 50x$)

傾きは、$\frac{y\text{の幅}}{x\text{の幅}}$ で求められる。上の例で、x の幅とは移動時間の 2 時間、y の幅とは移動距離の 100km である。よって、傾きは 50(=100÷2)であるとともに、平均の速さも 50km/h となる。

○ 平均の速さ(平均変化率)

平均の速さ v、　移動距離 s、　移動時間 t



加速中の物体が $s = 1.2t^2$ で移動している場合を考える。

移動距離 s を移動時間 t の関数 $s = f(t)$と考え、$f(t)=1.2t^2$ をグラフに表すと左のようになる。

時間 t_1 から t_2 までの移動時間は、$t =$［　　　］ で求められる。

時間 t_1 から t_2 までの移動距離は、$s =$［　　　　　］ で求められる。

時間 t_1 から t_2 までの平均の速さ v は、2 点を通る直線の傾きとなるので、次のようにして求めることができる。

$$v = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1.2{t_2}^2 - 1.2{t_1}^2}{t_2 - t_1}$$

この平均の速さ v を、関数 $f(t)$の t_1 から t_2 までの「平均変化率」という。

―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―・―

【1】加速中の物体が移動距離 $s = 2.3t^2$ で移動している。設問に答えよ。小数部がある場合は四捨五入で第 2 位まで求めよ。

① 出発してから 3 秒後までの平均の速さ(平均変化率)を求めよ。

［　　　　　　］

② 3 秒後から 6 秒後までの平均の速さ(平均変化率)を求めよ。

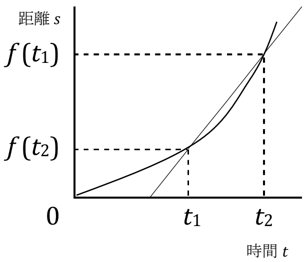
［　　　　　　］

③ 6 秒後から 9 秒後までの平均の速さ(平均変化率)を求めよ。

［　　　　　　］

微分　[P.187]　　　　　年次　　組　　番・氏名

○ 瞬間の速さと変化率(微分係数)



加速中の物体が $s = 1.2t^2$ で移動している場合、時間 t_1 の瞬間における速さ v_1 を求める。

グラフから時間 t_2 を t_1 に限りなく近づけて($t_2 \to t_1$ と表す)、平均の速さを求めれば時間 t_1 の瞬間の速さと見なすことができる。すなわち、$h = t_2 - t_1$ としたときの h を 0 に限りなく近づける($h \to 0$ と表す)ことである。

平均の速さ(平均変化率)を求める式の時間 t_2 を t_1+h として、$h \to 0$ にすると速さ v_1(時間 t_1 の瞬間の速さ)を求めることができる。

$$v_1 = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

この式の h を $h \to 0$ にすることを表すため次のように書く。

$$v_1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

v_1を時間t_1における「$\boxed{\quad\quad\quad}$」という(= 瞬間の速さ)。

この式に、関数 $f(t) = 1.2t^2$ (=s)を代入して整理していくと次のようになる。

$$v_1 =$$

したがって、$s = 1.2t^2$ で加速しながら移動している物体の時間 t_1 における瞬間の速さ v_1 は次の式で求められる。

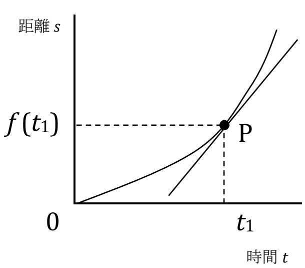
$v_1 = \boxed{\quad\quad\quad}$

例えば、時間 t=3 秒における瞬間の速さは $v = \boxed{\quad\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$ (m/s)と求められる。

一般に、関数 $f(x)$において x が t_1 から $t_1+h(=t_2)$まで変化するときの$\boxed{\quad\quad\quad}$において、$h \to 0$ としたときの$\boxed{\quad\quad\quad}$を関数$f(x)$の $x = t_1$ における「$\boxed{\quad\quad\quad}$」といい、「 $f'(t_1)$ 」と表す。

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

○ 接線と接線の傾き



関数 $f(t)=1.2t^2$ について、極限値を求めるために時間 t_2 を $t_2 \to t_1$ にすると、左のグラフのように曲線上の点 P に接する直線となる。このような直線を曲線の「$\boxed{\quad\quad}$」という。また、微分係数 $f'(t_1)$の値は、曲線の点 P における「$\boxed{\quad\quad\quad}$」を表し、これが時間 t_1 における瞬間の速さを表す。

微分　[P.190]　　　　　　　　　年次　　組　　番・氏名

○ 導関数

移動距離 s が関数 $f(t)=1.2t^2$ で表される物体の $t=t_1$ における微分係数 $f'(t_1)$は、すでに求めたように $f'(t_1)=$［　　］で表される。これは、時間 t_1 の［　　　　］を表す。例えば、時間 $t=5$ の瞬間の速さは $f'(5)=$［　　　　］となる。このように、関数 $f'(t_1)=$［　　］はいろいろな時間における瞬間の速さを表す関数であるから、$f'(t)=$［　　］のように一般的な形であらわす。

関数 $f(t)$から導かれた関数 $f'(t)$は一般に、関数 $f(t)$の「［　　　　］」という。また、関数 $f(t)$から導関数 $f'(t)$を求めることを「関数 $f(t)$を［　　　　］」や「関数 $f(t)$を［　　　　］」という。

導関数を表す記号は、$s=f(t)$の場合、$f'(t)$のほかに次のようにも表す。

［　　　　　　　　　　　　　　　　］

○ 導関数を求める

一般的に、関数 $f(x)$の導関数 $f'(x)$は次の式で求められる。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

これを使って、関数 $f(x)=x^2$ の導関数 $f'(x)$を求める。　$\boxed{(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} =$$

同じようにして、関数 $f(x)=x^3$ の導関数 $f'(x)$を求める。

$\boxed{(x+a)^3 = x^3+3a^2x+3ax^2+a^3}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-(x)^3}{h} =$$

また、関数 $f(x)=x$ と $f(x)=C$ の導関数も求める。

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} =$	$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h} =$

一般に、n が正の整数のとき次の微分の公式が成り立つ。

$(x^n)' =$［　　］

微分１　　　　　　　　　　　　　年次　　組　　番・氏名

【2】次の各設問の関数について、平均変化率を求めよ。

① $f(x)=x^2$ の x が 2 から 4 まで

② $f(x)=x^2$ の x が－2 から 1 まで

③ $f(x)=5x^2$ の x が 2 から 4 まで

④ $f(x)=5x^2$ の x が－2 から 1 まで

⑤ $f(x)=2x^3+3$ の x が 3 から 5 まで

【3】次の各設問の極限値を求めよ。

① $\lim_{h\to 0}(7+h)$

② $\lim_{h\to 0}3(2-3h)$

③ $\lim_{h\to 0}(-5-h)$

④ $\lim_{h\to 0}2(4h+2)$

⑤ $\lim_{h\to 0}(3-2h-3h^2)$

【4】次の各設問の微分係数を求めよ。

① $f(x)=x^2$ のときの $f'(5)$

$$f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad -5^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad -25}{h}=\lim_{h\to 0}\qquad =$$

② $f(x)=5x^2$ のときの $f'(3)$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad -5\cdot 3^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad -45}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad -45}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\qquad =$$

k を定数とすると、$f(x)=kx^2$ の導関数 $f'(x)$ は、$(kx^2)'=k$・$(x^2)'$ で求められる。

③ $f(x)=x^3+3$ のときの $f'(3)$

kx を定数とすると、$f(x)=x^2+k$ の導関数 $f'(x)$ は、$(x^2+k)'=(x^2)'$ で求められる。

④ $f(x)=2x^2+5x$ のときの $f'(4)$

$f(x)=x^2+x$ の導関数 $f'(x)$ は、$(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'$ で求められる。

微分 2　　　　　　　　　　　　年次　　組　　番・氏名

【5】次の各設問の関数を微分せよ。

① $y=4x^2$		② $y=3x^3$	
③ $y=-7x$		④ $y=-x^5$	
⑤ $y=x^2-5x$		⑥ $y=3x+8$	
⑦ $y=12$		⑧ $y=2x^3+4x^2-5$	
⑨ $y=-x^2-x$		⑩ $y=x^5-2x^3+3x$	

【6】次の各設問の関数を微分せよ。

① $y=2(x^2+5x)$	$y'=$
② $y=x(3x^3)$	$y'=$
③ $y=(x-2)^2$	$y'=$
④ $y=x^2(6x+3)$	$y'=$
⑤ $y=(x-2)(3x+2)$	$y'=$
⑥ $y=(x^2+1)(2x+1)$	$y'=$
⑦ $y=(-\frac{3}{4}x^3+x^2-\frac{5}{3})x=$	$y'=$
⑧ $y=(3x+5)^2$	$y'=$
⑨ $y=(x+1)^3$	$y'=$
⑩ $y=(x-2)^3$	$y'=$

【7】次の各設問の関数を微分し、それを利用して、(　)内に示した x の値における微分係数を求めよ。

① $f(x)=x^2$	$f'(x)=$	$f'(5)=$
② $f(x)=5x^2$	$f'(x)=$	$f'(3)=$
③ $f(x)=x^3+3$	$f'(x)=$	$f'(3)=$
④ $f(x)=2x^2+5x$	$f'(x)=$	$f'(4)=$

※ 問題【4】の答えと比べてみよ。

微分 3　　　　　　　　　　年次　　組　　番・氏名

【8】曲線 $y=x^2-2$ 上の $x=2$ の点 P における接線の方程式を求めよ。

直線の一般的な方程式は $y=ax+b$ である。この方程式で a の値は直線の傾き、b の値は直線の y 切片(せっぺん)を表す。

点 P の y の値は、曲線の式に x の値を代入して求めることができる。

$y=2^2-2$ より、$y=\boxed{}$ となる。

曲線上の点 P における微分係数が接線の傾きとなるから $x=2$ における微分係数を求める。

曲線 $f(x)=x^2-2$ を微分すると $f'(x)=\boxed{}$ となる。点 P における微分係数は、$f'(2)=\boxed{}$ であるから、点 P における接線の傾き a は $\boxed{}$ となる。

直線の方程式に傾きを代入すると接線の方程式は $y=\boxed{}+b$ となる。この接線は、曲線上の点 P($x=2$,$y=2$)を通るからこれらの値から y 切片を求める。$2=4\times2+b$ より、$b=\boxed{}$ となる。

よって、点 P における接線の方程式は、$y=\boxed{}$ となる。

【9】曲線 $y=x^2-2$ 上の $x=-2$ の点 P における接線の方程式を求めよ。

$y=$

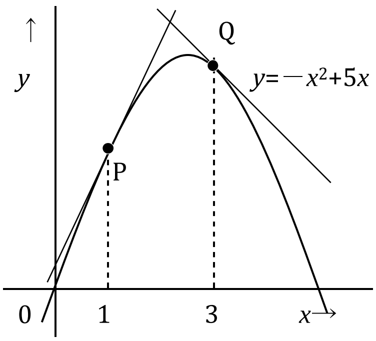
【10】曲線 $y=-x^2+5x$ 上の次の点における接線の方程式を求めよ。

① $x=1$ の点 P

$y=$

② $x=3$ の点 Q

$y=$



※ 傾きの値

点 P における接線は、右上がりであるから接線の傾きは正の値になる。

点 Q における接線は、右下がりであるから接線の傾きは負の値になる。

【11】移動距離 s が関数 $f(t)=0.8t^2$(m)で表される物体について、出発してから時間 $t=8$ 秒後の速さを求めよ。小数部がある場合は四捨五入で第 2 位まで求めよ。

【12】自由落下している物体の移動距離 s は関数 $f(t)=4.9t^2$(m)で表される。落ち始めてから時間 $t=4$ 秒後の速さを求めよ。小数部がある場合は四捨五入で第 2 位まで求めよ。

微分　[P.193]

年次　　組　　番・氏名

○ 加速度と微分

走行中の自動車は、常に速さが変化している。すなわち、速さは時間とともに変化しているので、時間 t における瞬間の速さは $v = g(t)$ (m/s)で表すことができる。

(関数 $g(t)$はどのような式になるか不詳)

加速度 a は、$\boxed{\qquad\qquad}$ ÷ $\boxed{\qquad\qquad}$ で求められる。時間の変化を 0 に近づけていく、すなわち速さ $v = g(t)$の極限が、時間 t における瞬間の加速度 a となる。

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

この式は、関数 $v = g(t)$の導関数 $v' = g'(t)$と同じ式であることから、$v' = a$ となる。すなわち、「加速度 a は、$\boxed{\qquad}$ を時間 t で $\boxed{\qquad}$ したものである」といえる。

例えば、出発してから t 秒後の瞬間の速さが $v = 0.4t^2$(m/s)で表されるとき、5 秒後の瞬間の速さは、$v = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\quad}$(m/s)である。このときの瞬間の加速度 a は、速さを表す関数 $g(t)$を $\boxed{\qquad}$ して得られる式を利用して求めることができる。$v = 0.4t^2$ であるとき、$v' = g'(t) = \boxed{\qquad}$ となる。時間 $t=5$ の瞬間の加速度は $a = g'(\boxed{\quad}) = \boxed{\qquad\quad} = \boxed{\qquad}$(m/s²)となる。

例えば、自由落下している物体は、落下し始めてから t 秒後の瞬間の速さ v は $g(t) = \boxed{\qquad}$ (m/s)で求められる。瞬間の加速度は、速さを微分して求められるから、加速度 $a = g'(t) = \boxed{\quad}$ (m/s)となる。この加速度 a は、時間に関係なく $\boxed{\qquad}$ であるといえる。このような加速度を $\boxed{\qquad\qquad}$ といい、このような運動を $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ という。

○ 加速度と距離

速さ v から加速度 a を求めるには、$\boxed{\qquad\quad}$ を時間 t で微分して求めた。また、速さ v は $\boxed{\qquad\quad}$ を時間で微分することはすでに学習した。

整理すると、距離 s を時間 t で微分すると速さ v が求められ、その速さ v をもう一度時間 t で微分すると加速度 a が求められる。すなわち、距離 s を時間 t で 2 回続けて微分すると $\boxed{\qquad\qquad}$ を求めることができる。式の表し方としては、$(s')' = a$ となる。カッコは省いて $s'' = a$ と表す。

$\boxed{\qquad\qquad}$ ←微分← $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ ←微分← $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$
　　　　　　→積分→　　　　　　　　　→積分→

例えば、移動距離が $s=0.7t^2$ (m)で表される物体の時間 t における瞬間の加速度は $a=s''$で求められる。計算は次のようになる。

$s=0.7t^2$

$s'=$

$s''=$

微分 4　　　　年次　　組　　番・氏名

【13】次の各設問の関数を x について 2 回続けて微分せよ。

① $y = 2.6x^2$	$y''=$
② $y = 3x^2 - 7x$	$y''=$
③ $y = 4.8x^3+1.8x$	$y''=$
④ $y = -6x^2+7$	$y''=$
⑤ $y = 2x^3+5x^2+9x$	$y''=$

【14】ある物体が出発してから t 秒後の瞬間の速さが v=1.1t^2 (m/s)で表されるとき、2, 4, 6, 8 秒後の加速度を求めよ。小数部がある場合は四捨五入で第 2 位まで求めよ。

① 2 秒後	m/s²	② 4 秒後	m/s²
③ 6 秒後	m/s²	④ 8 秒後	m/s²

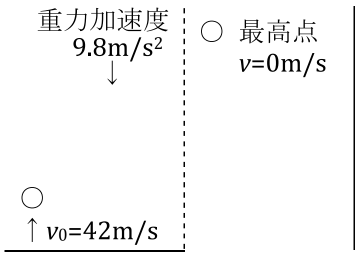
【15】ある物体が出発してから t 秒後の瞬間の速さが v=3.2t (m/s)で表されるとき、2 ,4 ,6 , 8 秒後の加速度を求めよ。小数部がある場合は四捨五入で第 2 位まで求めよ。

① 2 秒後	m/s²	② 4 秒後	m/s²
③ 6 秒後	m/s²	④ 8 秒後	m/s²

【16】移動距離 s が関数 $f(t)$=0.8t^2(m)で表される物体について、時間 t における加速度を求めよ。

【17】自由落下している物体の移動距離 s は関数 $f(t)$=4.9t^2(m)で表される。時間 t における加速度を求めよ。

【18】ボールを鉛直上方速さ 42(m/s)で投げ上げた。t 秒後のボールの高さ h は、h=42t−4.9t^2 で表される。小数部がある場合は四捨五入で第 2 位まで求めよ。



① t 秒後の速さ v を求める関数を答えよ。

② t 秒後の加速度 a を求めよ。

③ ボールが最高点に達するのは何秒後か。

④ 最高点の高さは何 m か。