積分　[P.196]　　　　年次　　組　　番・氏名

○ 積分

移動距離 s が関数 $f(t)=1.2t^2$ で表される物体の時間 t における微分係数 $f'(t)$は、$f'(t)=\boxed{\quad\quad}$で表すことができ、この微分係数は、時間 t の$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$を表すことはすでに学習した。微分は、変化する現象の瞬間の状態を知るために利用する。

時間 t における瞬間の速さ v が関数 $f(t)=2.4t$ で表されるとき、微分と逆の操作によって、$s=1.2t^2$ を求めることができれば、t 秒間に移動する距離を求める関数 $s=1.2t^2$ が得られる。

関数 $F(x)$の導関数が $f(x)$であるとき、すなわち、関数 $F(x)$を x で$\boxed{\quad\quad}$すると関数 $f(x)$が得られるとき($F'(x) = f(x)$)、関数 $F(x)$を $f(x)$の「$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$」という。

導関数 $f(x)$から原始関数 $F(x)$を求めることを「x で$\boxed{\quad\quad\quad}$する」という。式は次のように表す。

$\int f(x)dx$　　(記号∫はインテグラルと読む)。

○ 不定積分

x^3 を微分すると$\boxed{\quad\quad}$となる。逆の操作が積分であるから、$3x^2$ を積分すると x^3 が求められる。しかし、$3x^2$ となる原始関数は 1 つとは限らない。

$(x^3)' =$
$(x^3-1)' =$
$(x^3+3)' =$

このように、どのような定数 C でも微分すると$(C)'= 0$ となるので、$(x^3+C)'= 3x^2$ となる。このことから、$3x^2$ を積分すると x^3+C が正解となる。定数 C を「$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad}$」といい、積分して得られた原始関数は 1 つに決まらないので「$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad}$」という。

○ 不定積分を求める

$(x)' = 1$　より　　　　　$\int 1\,dx =$

$(x^2)' = 2x$　より　$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$　となる　　　　$\int x\,dx =$

$(x^3)' = 3x^2$　より　$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$　となる　　　　$\int x^2\,dx =$

$(x^4)' = 4x^3$　より　$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$　となる　　　　$\int x^3\,dx =$

一般に、n が正の整数のとき次の微分の公式が成り立つ。

$$\int x^n\,dx =$$

関数を定数倍した場合は次のようになる。

$$\int \{k\cdot f(x)\}\,dx =$$

関数の和の場合は次のようになる。

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx =$$

計算例

$\int (x^3+x^2-x)\,dx$
$= \int x^3\,dx + \int x^2\,dx + \int x\,dx$
$= \frac{1}{4}x^4 + C_1 + \frac{1}{3}x^3 + C_2 + \frac{1}{2}x^2 + C_3$
$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

積分定数はまとめて C で表す。

積分 1　　　　　　　　　　　　年次　　組　　番・氏名

【1】次の不定積分を求めよ。　　　(例)　$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\times\frac{1}{2}x^2 + C = x^2 + C$

① $\int 5x\,dx = 5\int x\,dx =$	② $\int(-3x)\,dx =$
③ $\int 8\,dx =$	④ $\int(-6)\,dx =$
⑤ $\int 6x^2\,dx =$	⑥ $\int 8x^3\,dx =$

【2】次の不定積分を求めよ。　　　(例)　$\int(x+1)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + x + C$

① $\int(5x+2)\,dx = 5\int x\,dx + \int 2\,dx =$
② $\int(-3x+6)\,dx =$
③ $\int(3x^2+4x-2)\,dx =$
④ $\int(-2x^2-5x)\,dx =$
⑤ $\int(5x^3-2x^2+3x)\,dx =$

【3】次の不定積分を求めよ。

(例)　$\int(x+1)(x+2)\,dx = \int(x^2+3x+2)\,dx = \int x^2\,dx + \int 3x\,dx + \int 2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

① $\int(x+2)(x-1)\,dx = \int(x^2+x-2)\,dx$
② $\int x(3x+6)\,dx =$
③ $\int(x+3)^2\,dx =$
④ $\int(2x-3)(x+2)\,dx =$
⑤ $\int x(3x+2)^2\,dx =$

乗法公式	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
$(ax+b)(cx+d) = ac^2 + (ad+bc)x + bd$	

積分　[P.198]　　　　　年次　　組　　番・氏名

○ 速さから距離(積分法)

出発してから t 秒後の速さが v=2.6t (m/s)で表される物体について、出発してから 10 秒後までの移動距離 s を求める。出発地点の移動距離は 0(m)とする。

距離を□すると速さが求められたから、逆に、速さを□すると距離が求められる。速さを表す関数が v=□で与えられているから、これを積分する。

$$距離s = \int v\,\mathrm{d}t =$$

出発地点が 0m であるから時間 t=0 のとき距離 s=0 と考えられる。距離 s の式に t=0, s=0 を代入して、C を求める。

□= 1.3×□+ C　より　C =□

このように、積分定数 C を決めるために、t=0 のとき s=0 であるという条件を設定した。このような条件を「□」という。これで、距離 s の式が得られたので、10 秒後までの移動距離を求めると、移動距離は s =□(m)となる。

○ 加速度から速さ(積分法)

出発してから t 秒後の加速度が a =2.6 (m/s^2)(等加速度)で表される物体について、出発してから 10 秒後の速さ v を求める。出発地点の速さは 0(m/s)とする。

速さを□すると加速度が求められたから、逆に、加速度を□すると速さが求められる。加速度は a =□で与えられているから、これを積分する。

$$速さv = \int a\,dt =$$

初期条件は、t=0 のとき v=0 であるから、C=□となる。したがって、この物体の 10 秒後の速さは v=□(m/s)となる。

○ 等加速度運動

加速度 a(m/s^2)で等加速度運動している物体の t 秒間の移動距離 s について考える。

まず、速さは加速度を積分すれば求められるので、速さは次のようになる。

$$v = \int a\,dt =$$

初期条件を t=0 のとき、$v = v_0$(m/s)とすると、積分定数$C_1 = v_0$となるので、速さは次の式で求められる。(v_0 は初速度)

$$v =$$

次に、距離は速さを積分すれば求められるので、距離は次のようになる。

$$s = \int v\,dt =$$

初期条件を t=0 のとき、$s = 0$(m)とすると、積分定数$C_2 = 0$となるので、距離は次の式で求められる。

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

積分 2 年次　組　番・氏名

【4】出発してから t 秒後の速さが $v=1.8t$ (m/s)で表される物体について、出発してから 20 秒後までの移動距離 s(m)を求めよ。出発地点の移動距離は 0(m)とする。

【5】出発してから地点 A を速さ 5.0(m/s)で通過した。地点 A を通過してから t 秒後の速さが $v=2.1t$ (m/s)で表される物体が地点 A から 35 秒後に地点 B に到達した。出発してから地点 B までの移動距離 s(m)を求めよ。出発してから地点 A までの移動距離は 1713.75(m)とする。

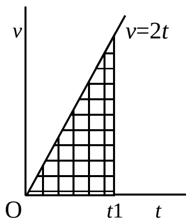
【6】出発してから t 秒後の加速度が $a=0.7$(m/s^2)(等加速度)で表される物体について、出発してから 123 秒後の速さ v(m/s)を求めよ。出発地点の速さは 0(m/s)とする。

【7】地点 A を通過してから t 秒後の加速度が $a=1.1$(m/s^2)(等加速度)で表される物体について、地点 A から 50 秒後の速さ v(m/s)を求めよ。地点 A 通過時の速さは 13(m/s)とする。

【8】出発してから t 秒後の加速度が $a=1.4$(m/s^2)(等加速度)で表される物体について、出発してから 23 秒後の移動距離 s(m)を求めよ。出発地点の速さは 0(m/s)、移動距離は 0(m)とする。

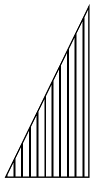
積分　[P.200]　　　　年次　　組　　番・氏名

○ 図形の面積と定積分



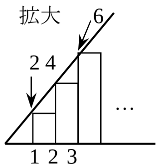
左のような $v-t$ (速さと時間)グラフにおいて、面積が$\boxed{\qquad\quad}$になることはすでに学習した。$t=t_1$のとき $v=2t_1$ であるから面積は、$s=\boxed{\qquad\qquad}$となり、この値が t_1 秒間の移動距離となる。

具体的に値を当てはめて計算してみると、t=10(s)のとき $v=\boxed{\quad}$(m/s)であるから面積は、$s=\boxed{\qquad\quad}=\boxed{\quad}$と計算できる。すなわち、移動距離は$\boxed{\quad}$(m)となる。$s=vt$ で計算するとき、v=20(m/s)は t=10(s)のときの速さであるから 10 秒間の平均の速さ($=\frac{20+0}{2}$=10(m/s))を計算してから $s=vt$ で距離を計算する必要がある。



三角形の面積を左の図のように、底辺(x 軸)を等分に分割した細長い長方形で埋め尽くしたとき、細長い長方形の面積の和が三角形の面積に近い値になる。

例えば、底辺 10、高さ 20(t=10,v=20)の三角形とする。面積は 100 である。



この底辺を 10 等分した細長い長方形を考える(左図参照)と 1 つ目の長方形の面積は 2(=1×2)、2 つ目は 4(=1×4)、3 つ目は 6(=1×6)、…、9 つ目は 18(=1×18)となる。面積は等分した横幅(間隔)に高さを掛け算する。

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
間隔	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
v	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	$v=2t$
面積	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	計=90

20 等分すると次のようになる。

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	
間隔	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	
v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
面積	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	計=95

分割数を増やすほど、実際の面積の値(100)に近づいていく。

積分は微分の逆の操作であるとともに、小さく分割してから全部足す、ちょうど上のように三角形を小さな(細長い)長方形に分割してからすべてを足すのと同じことである。ここでは、$v=2t$ の t=0 から t=10 までの三角形の面積を求めた。積分を使って書き表すと次のようになる。

$$\int_0^{10} 2t\,dt$$

不定積分と違って、インテグラルに数字が書かれている。これを関数 $2t$ の 0 から 10 までの「$\boxed{\qquad\quad}$」という。

※インテグラルは足し合わせ(*Summeation*)の S を延ばしたもの、dx の d は小さいという意味を込めて微分(*differential*)の d である。

○ 定積分の計算

$\int_0^{10} 2t\,dt$は、関数 $2t$ を積分し($F(t)=\int 2t\,dt=t^2+C$)、t=10 を代入したものから t=0 を代入したものを引いて計算する($F(10)+C-(F(0)+C)=F(10)-F(0)$)。次に式で表す。

$$s=\int_0^{10} 2t\,dt=[t^2]_0^{10}=10^2-0^2=100$$

積分 3　　　　　　　　　　年次　　組　　番・氏名

定積分の計算　　$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

【9】次の定積分を求めよ。　　　(例)　$\int_2^6 x\,dx = [\frac{1}{2}x^2]_2^6 = \frac{1}{2}[x^2]_2^6 = \frac{1}{2}\times(36-4) = 16$

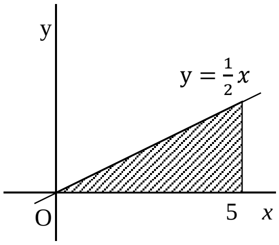
① $\int_3^5 x\,dx =$	② $\int_0^2 x^2\,dx =$
③ $\int_{-3}^3 x\,dx =$	④ $\int_{-3}^{-1} x\,dx =$
⑤ $\int_{-4}^3 x\,dx =$	⑥ $\int_1^3 5\,dx =$

【10】次の定積分を求めよ。

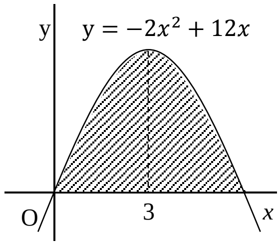
(例)　$\int_1^3 (x+1)\,dx = \int_1^3 x\,dx + \int_1^3 1\,dx = \frac{1}{2}[x^2]_1^3 + [x]_1^3 = \frac{1}{2}(9-1) + (3-1) = 6$

① $\int_2^3 (x-1)\,dx =$
② $\int_2^4 (4x+3)\,dx =$
③ $\int_{-1}^2 (x^2-x)\,dx =$
④ $\int_0^2 (2x^2-4x+2)\,dx =$
⑤ $\int_{-2}^2 (3x^2-3)\,dx =$

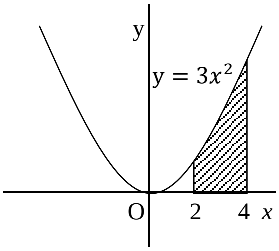
【11】次の斜線部の面積を求めよ。



【12】次の斜線部の面積を求めよ。



【13】次の斜線部の面積を求めよ。



【14】次の斜線部の面積を求めよ。