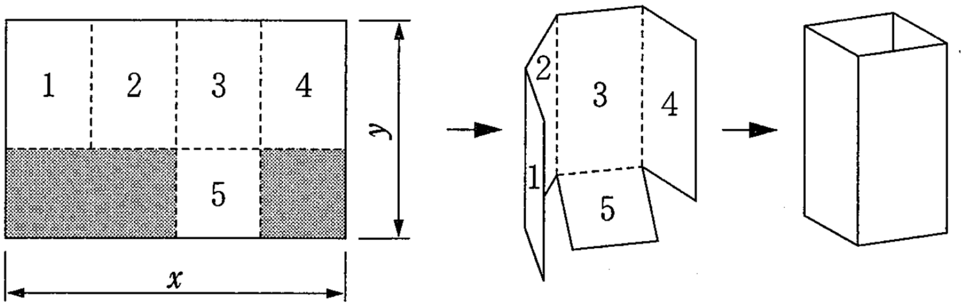
材料と容積（微分） (大学入試センター試験 2007)

年次　　組　　番・氏名

第１問　問２　図のように、横 x[cn]、縦 y[cm]の長方形の鋼板がある。網掛け部分を切り取り、点線で折り曲げて、ふたのない正四角柱の容器を作る。このとき、鋼板の寸法と容器の容積の関係について考えてみよう。なお、鋼板の厚さは考えないものとする。



容器の底面積は $\boxed{\text{キ}}$ [cm²]、容器の高さは $-\frac{x}{4}+y$[cm]であるから、

容器は $-\boxed{\text{ク}}+\frac{x^2y}{16}$[cm³]となる。ここで、使用する長方形の鋼板の面積を a[cm²]とし、a を一定とする。このとき、$a=xy$ の関係が成り立つことから、容積を x の関数 $f(x)$で表すと、$f(x)$は次の式のようになる。

$$f(x)=-\boxed{\text{ク}}+\frac{ax}{16} \qquad (x>0) \qquad (2)$$

次に、$f'(x)$の増減を調べるため、式(2)を x について微分し、整理すると次のようになる。

$$f'(x)=-\frac{3}{64}x^2+\boxed{\text{ケ}}=-\frac{3}{64}\left(x-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x+2\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \qquad (3)$$

$f'(x)$の値の符号を考えることにより、$f(x)$は$0<x<2\sqrt{\frac{a}{3}}$ のとき単調増加、$x>2\sqrt{\frac{a}{3}}$ のとき単調減少であることがわかる。したがって、$f(x)$は$x=2\sqrt{\frac{a}{3}}$ のとき最大値をとる。また、$a=xy$ であるから、$f(x)$ が最大値をとるときの x と y の比率は、$x:y=4:\boxed{\text{コ}}$ となり、この比率のとき同じ面積の鋼板で最も容積の大きな容器を製作できる。このとき、切り取った網掛け部分の面積は、鋼板全体の面積の $\boxed{\text{サシ}}$ %である。

$\boxed{\text{キ}}$～$\boxed{\text{ケ}}$　(0) $\frac{a}{4}$　(1) $\frac{a}{16}$　(2) $\frac{a}{64}$　(3) $\frac{x^2}{4}$　(4) $\frac{x^2}{16}$

(5) $\frac{x^2}{64}$　(6) $\frac{x^3}{4}$　(7) $\frac{x^3}{16}$　(8) $\frac{x^3}{64}$

解説　正四角柱の容器を製作するのだから、鋼板 5 は正方形である。この正方形の 1 辺の長さは x の$\frac{1}{4}$ であるから、面積は$\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}=\frac{x^2}{16}$ となる。　　　$\boxed{キ\ 4}$

この容器の高さは問題に示されているように、$-\frac{x}{4}+y$ であるから「容積(体積) = 底面積×高さ」より、次のようになる。

容積 $f(x)=\frac{x^2}{16}\times\left(-\frac{x}{4}+y\right)=-\frac{x^3}{64}+\frac{x^2y}{16}$　　　$\boxed{ク\ 8}$

また、$a=xy$ の関係を利用すると上の式は問題の式(2)に示されている式になる。

$$f(x)=-\frac{x^3}{64}+\frac{x^2y}{16}=-\frac{x^3}{64}+\frac{ax}{16} \qquad (2)$$

$f(x)=x^3$ を x で微分すると $f'(x)=3x^2$ となる。$f(x)=x$ を x で微分すると $f'(x)=1$ となる。よって、式(2)を微分すると次のようになる。

$f'(x)=-\frac{3}{64}x^2+\frac{a}{16}$　　　$\boxed{ケ\ 1}$

$$f'(x)=-\frac{3}{64}x^2+\frac{a}{16}=-\frac{3}{64}\left(\frac{3x^2}{64}\times\frac{64}{3}-\frac{a}{16}\times\frac{64}{3}\right)=-\frac{3}{64}\left(x^2-\frac{a}{1}\times\frac{4}{3}\right)=-\frac{3}{64}\left(x^2-\frac{4a}{3}\right)$$

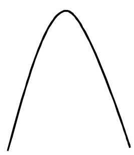
$(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$より

$$f'(x)=-\frac{3}{64}\left(x-\sqrt{\frac{4a}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{4a}{3}}\right)=-\frac{3}{64}\left(x-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x+2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$$

$f'(x)$の符号から $f(x)$の増減を考える。

$x=0$ のとき、$-\frac{3}{64}$は負、$\left(x-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$は負、$\left(x+2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$は正で、この 3 つの掛け算は、負×負×正=正となる。これを「負負正=正」と表す。

x	0	1	2	$2\sqrt{a/3}$	3	4
$f'(x)$	負負正 =正	負負正 =正	負負正 =正	負零正 =零	負正正 =負	負正正 =負
$f(x)$	単調増加			最大	単調減少	



容積が最大となる x は、$x=2\sqrt{\frac{a}{3}}$ 、 $a=xy$であるから、$y=\frac{a}{x}$ より次のように y を求める。

$$y=\frac{a}{x}=\frac{a}{2\sqrt{\frac{a}{3}}}=\frac{a\times\sqrt{\frac{a}{3}}}{2\sqrt{\frac{a}{3}}\times\sqrt{\frac{a}{3}}}=\frac{a\times\sqrt{\frac{a}{3}}}{\frac{2a}{3}}=\left(a\times\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\div\frac{2a}{3}=\left(a\times\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\times\frac{3}{2a}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$x:y=2\sqrt{\frac{a}{3}}:\frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}$　　　x と y を$\sqrt{\frac{a}{3}}$ で割る。

$x:y=2:\frac{3}{2}$　　　x と y に 2 をかける。

$x:y=4:3$　　　x と y に 2 をかける。　　　$\boxed{コ\ 3}$

網掛け部分の面積は鋼板 5 の 3 倍である。鋼板 5 の面積は次のようになる。

$$鋼板5の面積 = \frac{x^2}{16} = \frac{\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2}{16} = \frac{\frac{4a}{3}}{16} = \frac{4a}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{a}{12}$$

$$網掛け部分 = 3 \times \frac{a}{12} = \frac{a}{4}$$

鋼板全体の面積は $a=xy$ であるから、網掛け部分は全体の 1/4(25%)となる。 $\boxed{サシ\ 25}$

(別解)　x と y の比が 4:3 であるから、$x=4$, $y=3$ で考えると鋼板 5 の 1 辺の長さは 1 となり、鋼板 5 の面積は 1 である。よって、網掛け部分の面積は 3 となる。全体は 4×3=12 であるから、網掛け部分の割合は$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ と求められる。$\frac{1}{4} = 0.25,\ 0.25 \times 100 = 25\%$。