三角関数 (大学入試センター試験 2009)

年次　　組　　番・氏名

第 1 問　問 2 河川や海岸などの地形の計測や建築物の高さを求めるために、三角比が利用できる。図 2 に示すような建物の高さ a [m]を求めよう。なお、必要であれば次の値を用いよ。

$\sqrt{2} = 1.41$,　　$\sqrt{3} = 1.73$

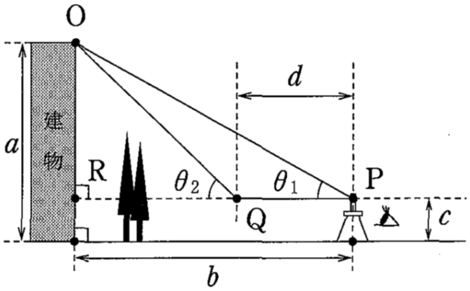


図 2

(1) 点 P から建物までの距離 b [m]があらかじめ分かっている場合を考えよう。点 P に望遠鏡と分度器で構成される器機(セオドライトと呼ばれる)を設置し、望遠鏡で建物頂部の点 O に照準を合わせることにより、水平線に対する角 θ_1[°] を測定できる。点 P が地表から高さ c [m]にあることに注意すれば、$a = b \times$ $\boxed{ク}$ $+ c$という関係が得られる。

(2) 建物の前に障害物があり、距離 b が直接測れない場合を考える。点 P と同じ高さで建物上にある点 R とし、線分 PR 上に点 Q をとる。点 P における角 θ_1[°]と、点 Q における角 θ_2[°]および PQ 間の距離 d [m]を測定すれば、建物の高さ a および建物までの距離 b が得られることを示そう。

直角三角形 OQR に対して、次の式が得られる。

$$\frac{a-c}{b-d} = \boxed{ケ}$$

(1)で得られた関係と連立させると、建物の高さ a と距離 b が次のように求められる。

$$a = d\frac{\boxed{コ}}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1} + c, \qquad b = d\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$

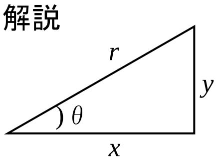
c =1.50m、d =8.50m、角 θ_1=30° および角 θ_2=45° のとき、建物の高さは $\boxed{サシ}$. $\boxed{ス}$ m と得られる。

このような測量の仕組みは、さまざまな場面で用いられる。興味深い例として、地球の公転軌道上に点 P および点 Q をとり、地球から遠く離れた天体を点 O にとり、地球からその天体までの距離を 17250 光年と計測した報告がある。

【補足説明】$\boxed{サシ}$.$\boxed{ス}$ の回答においては、分母を有理化したのち、与えられた近似値を用いて計算すること。

$\boxed{ク}$〜$\boxed{コ}$	(0) $\sin\theta_1$	(1) $\cos\theta_1$	(2) $\tan\theta_1$	(3) $\sin\theta_2$	(4) $\cos\theta_2$
	(5) $\tan\theta_2$	(6) $\sin\theta_1\sin\theta_2$	(7) $\cos\theta_1\cos\theta_2$	(8) $\tan\theta_1\tan\theta_2$	
	(9) $\sin\theta_1+\sin\theta_2$	(a) $\cos\theta_1+\cos\theta_2$	(b) $\tan\theta_1+\tan\theta_2$		

解説



$\sin\theta = y/r$　　$\cos\theta = x/r$　　$\tan\theta = y/x$

$\sin 30^\circ = 1/2$　　$\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$　　$\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$

$\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$　　$\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$　　$\tan 45^\circ = 1$

(1) 直角三角形 OPR で距離 PR(=b=x)と角度 θ_1 がわかっているとき、距離 OR(=y)は三角関数の tan で求めることができる。$\tan\theta_1 = y/x$ = OR/PR より、OR=PR $\tan\theta_1$=$b\tan\theta_1$ で求められる。a = OR+c であるから、$a = b\tan\theta_1 + c$ となる。　　$\boxed{ク\quad 2}$

(2) 距離 QR=$b-d$、距離 OR=$a-c$ であるから、直角三角形 OQR において、$\tan\theta_2$= OR/QR = $(a-c)/(b-d)$と求められる。　　$\boxed{ケ\quad 5}$

(1)で求めた OR=$b\tan\theta_1$($a-c = b\tan\theta_1$)と連立させ、a と b について変形すると次のようになる。まず、b について変形する。(結果は問題に示されている。)

$$\tan\theta_2 = \frac{a-c}{b-d} = \frac{b\tan\theta_1}{b-d}$$

$$(b-d)\tan\theta_2 = b\tan\theta_1$$

$$b\tan\theta_2 - d\tan\theta_2 = b\tan\theta_1$$

$$b\tan\theta_2 - b\tan\theta_1 = d\tan\theta_2$$

$$b(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = d\tan\theta_2$$

$$b = \frac{d\tan\theta_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1} = d\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$

これを(1)で求めた $a-c = b\tan\theta_1$ に代入すると次のように a が求められる。

$$a = b\tan\theta_1 + c$$

$$a = d\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1} \times \tan\theta_1 + c$$

$$a = d\frac{\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1} + c \qquad \boxed{コ\quad 8}$$

c =1.50m、d =8.50m、角 θ_1=30° および角 θ_2=45° のとき、建物の高さ a を求める。

$$\tan\theta_1 = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ (\text{分母の有理化})、\qquad \tan\theta_2 = \tan 45^\circ = 1$$

$$a = d\frac{\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1} + c$$ に値を代入して計算する。$\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$

$$a = 8.50 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\times 1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} + 1.50 = 8.50 \times \frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{3\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} + 1.50 = 8.50 \times \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} + 1.50$$

$$= 8.50 \times \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} + 1.50 = 8.50 \times \frac{3\sqrt{3}+3}{9-3} + 1.50 = 8.50 \times \frac{3(\sqrt{3}+1)}{6} + 1.50$$

$$= 8.50 \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} + 1.50 = 4.25 \times \left(\sqrt{3}+1\right) + 1.50 = 4.25 \times (1.73+1) + 1.50$$

$$= 4.25 \times 2.73 + 1.50 = 13.1025$$ $\boxed{\text{サシ}\quad 13}$ $\boxed{\text{ス}\quad 1}$