

## 汚れ濃度 (大学入試センター試験 2010)

年次 組 番・氏名

**第1問 問2** ある製品の製造工程では、タンクに貯めた水に製品を浸して、製造中に付着した汚れを洗浄する。一般には洗浄しても汚れは完全には落ちない。洗浄の仕方によって汚れの残り方が変わってくるについて考えてみよう。

製品  $1\text{kg}$ (汚れ物質の質量は含まない)あたりに付着している汚れ物質の質量を「汚れ度」と呼ぶことにする。洗浄前の汚れ度を  $p_0$  [kg/kg](汚れ物質の質量は製品の質量に比べて十分に小さい)とすると、質量  $M$  [kg]の製品に最初に付着していた汚れ物質の全質量は  $\boxed{\text{カ}}$  [kg]と表せる。

次に、この質量  $M$  の製品を体積  $V$  [m<sup>3</sup>]のきれいな水で洗浄することを考える(図2)。ただし、製品の質量に汚れ物質の質量は含まれないものとする。洗浄水中に汚れ物質が溶け出し、最終的に洗浄水中の汚れ物質の濃度が  $c$  [kg/m<sup>3</sup>]になったとしよう。この場合、濃度は洗浄水の  $1\text{m}^3$ 中に溶けている汚れ物質の質量である。すると、体積  $V$  の洗浄水中に溶け出した汚れ物質の全質量は  $\boxed{\text{キ}}$  [kg] と表せる。

以上より、洗浄後に製品に残る汚れ物質の質量は  $(\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}})$  [kg]となる。したがって、洗浄後の汚れ度  $p_1$  は  $p_1 = p_0 - \boxed{\text{ク}}$  と表せる。

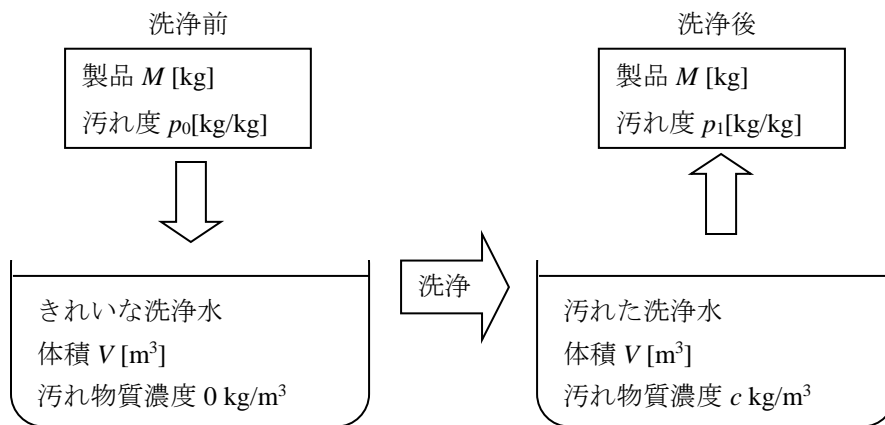


図2

すでに汚れ物質が溶けている洗浄水では、汚れの落ちが悪くなる。つまり、製品に残る汚れは、そのとき製品が浸されている洗浄中の汚れ物質濃度が高いほど多くなる。ここで、洗浄中の最終的な汚れ物質濃度  $c$  と製品に残留する汚れ度  $p_1$  との間に、 $K$  [m<sup>3</sup>/kg]を比例定数( $K > 0$ )として  $p_1 = Kc$  の関係が成り立つ場合を考えよう。この場合、上の結果と組み合わせることにより、次の関係式(1)を導くことができる。

$$p_1 = \frac{KM}{KM + V} \times p_0 \quad (1)$$

同じように考えて、1回目と同量のきれいな洗浄水を使って2回目の洗浄を行ったときに

残る汚れ度  $p_2$  は、次式(2)で表すことができる。

$$p_2 = \frac{KM}{KM+V} \times p_1 = \boxed{\text{ケ}} \times p_0 \quad (2)$$

同様に、3回以上の繰り返し洗浄後に残る汚れ度も求められる。

ここで、 $M = 10\text{kg}$ 、 $K = 0.20 \text{ m}^3/\text{kg}$  とする。 $V = 10\text{m}^3$  のきれいな水で洗浄を1回行うと、残留する汚れ物質は初期量の17%になる。一方、1回に  $V = 3.0\text{m}^3$  のきれいな水を使う洗浄を3回行う(計  $9.0 \text{ m}^3$  使用)場合、最終的に残留する汚れ物質は初期量の  $\boxed{\text{コ}}$  .  $\boxed{\text{サ}}$  % となり、 $10\text{m}^3$  より少ない水で汚れを少なくできる。

洗浄の仕方を工夫することで、より少ない資源でより多くの汚れを落とすことができる。また、洗浄工程全体で使用するエネルギーや作業コストなどの兼ね合いも考えて、洗浄の仕方を決めることが必要である。

$\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{ケ}}$	(0) $cV$	(1) $\frac{V}{c}$	(2) $\frac{c}{V}$	(3) $cVM$
	(4) $\frac{cV}{M}$	(5) $\frac{cM}{V}$	(6) $Mp_0$	(7) $\frac{p_0}{M}$
	(8) $\frac{2KM}{KM+V}$	(9) $\frac{KM}{2(KM+V)}$	(a) $\left(\frac{KM}{KM+V}\right)^2$	(b) $\sqrt{\frac{KM}{KM+V}}$

## 解説

問題から「汚れ度」は、製品 1kg 当たり付着している汚れ物質の質量(kg)で、洗浄前の汚れ度を  $p_0$ [kg/kg]とするとされている。すなわち、1kg の製品には汚れ物質が  $p_0$ [kg]付着していることになる。2kg の製品には  $2p_0$ [kg]、10kg の製品には  $10p_0$ [kg]の汚れ物質が付着している。

よって、質量  $M$  [kg]の製品に付着している汚れ物質の全質量は  $Mp_0$  [kg]となる。 カ 6

同じように、洗浄水の中の汚れ物質の濃度が  $c$ [kg/m<sup>3</sup>]ということは、1m<sup>3</sup>の洗浄水に  $c$ [kg]の汚れ物質が溶けていることになる。2m<sup>3</sup>の洗浄水に  $2c$ [kg]、10m<sup>3</sup>の洗浄水に  $10c$ [kg]の汚れ物質が溶けている。

よって、体積  $V$  [m<sup>3</sup>]の洗浄水に溶けている汚れ物質の全質量は  $Vc$ [kg]となる。 キ 0

質量  $M$  [kg]の製品に付着している汚れ物質の質量  $Mp_0$  [kg]から体積  $V$  [m<sup>3</sup>]の洗浄水に溶け出した汚れ物質の質量  $Vc$ [kg]を引けば、製品に残る汚れ物質の質量は  $Mp_0 - Vc$ [kg]となる。

洗浄後、質量  $M$  [kg]の製品に付着している汚れ物質の質量は  $Mp_0 - Vc$ [kg]であるから、洗浄後の汚れ度  $p_1$  [kg/kg]は次の通りとなる。

$$\text{汚れ度} = \frac{\text{汚れ物質の質量[kg]}}{\text{製品の質量[kg]}} \quad \text{より}$$

$$p_1 = \frac{Mp_0 - Vc}{M} = \frac{Mp_0}{M} - \frac{Vc}{M} = p_0 - \frac{Vc}{M} \quad \text{ク 4}$$

式(1)は問題に示されているが、求めてみよう。

製品に残る汚れ度  $p_1 = Kc$  とする。 $K$  [m<sup>3</sup>/kg]は比例定数、 $c$ は洗浄水中の最終的な汚れ物質濃度である。すなわち、汚れ濃度が  $c$  の洗浄水で洗浄すると、洗浄後の製品の汚れ度は  $p_1$  となる。

$$p_1 = p_0 - \frac{Vc}{M} \quad \text{と} \quad p_1 = Kc \quad \text{より式(1)を導く。}$$

$$p_1 = p_0 - \frac{Vc}{M} \quad \rightarrow \quad p_1 - p_0 = -\frac{Vc}{M} \quad \rightarrow \quad M(p_1 - p_0) = -Vc \quad \rightarrow \quad c = -\frac{M(p_1 - p_0)}{V}$$

この値を  $p_1 = Kc$  に代入する。

$$p_1 = -K \times \frac{M(p_1 - p_0)}{V} = \frac{-KMp_1 + KMp_0}{V} = -\frac{KMp_1}{V} + \frac{KMp_0}{V}$$

$$p_1 + \frac{KMp_1}{V} = \frac{KMp_0}{V} \quad \rightarrow \quad \frac{Vp_1}{V} + \frac{KMp_1}{V} = \frac{KMp_0}{V} \quad \rightarrow \quad Vp_1 + KMp_1 = KMp_0 \quad \rightarrow$$

$$(V + KM)p_1 = KMp_0 \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{KM}{KM+V} \times p_0 \quad (1)$$

(別解)  $c = p_1/K$  をもう一つの式に代入しても求められる。

$$p_1 = p_0 - \frac{V}{M} \times \frac{p_1}{K} \quad \rightarrow \quad p_1 + \frac{Vp_1}{KM} = p_0 \quad \rightarrow \quad \left(1 + \frac{V}{KM}\right)p_1 = p_0$$

$$p_1 = \frac{p_0}{1 + \frac{V}{KM}} = \frac{p_0 \times KM}{\left(1 + \frac{V}{KM}\right) \times KM} = \frac{KM}{KM+V} p_0 \quad (1)$$

2 回目の洗浄で残る汚れ度  $p_2$  は、式(2)の  $p_1$  に式(1)を代入して求める。

$$p_2 = \frac{KM}{KM+V} \times p_1 = \frac{KM}{KM+V} \times \frac{KM}{KM+V} \times p_0 = \left( \frac{KM}{KM+V} \right)^2 \times p_0 \quad \boxed{\text{ケ a}}$$

同じように、3 回洗浄は  $p_3 = \left( \frac{KM}{KM+V} \right)^3 \times p_0$  となる。よって、 $n$  回洗浄では  $p_n = \left( \frac{KM}{KM+V} \right)^n \times p_0$  となる。

$M = 10\text{kg}$ 、 $K = 0.20 \text{ m}^3/\text{kg}$  とする。 $V = 10\text{m}^3$  の洗浄水で 1 回洗浄すると汚れ度は、

$$p_1 = \frac{KM}{KM+V} \times p_0 = \frac{0.2 \times 10}{0.2 \times 10 + 10} \times p_0 = \frac{2}{12} \times p_0 = 0.1666 \dots \times p_0$$

元の汚れ度  $p_0$  の 0.17 倍(17%)となる。

一方、 $M = 10\text{kg}$ 、 $K = 0.20 \text{ m}^3/\text{kg}$  とする。 $V = 3.0\text{m}^3$  の洗浄水で洗浄を 3 回(計  $9.0 \text{ m}^3$ )すると汚れ度は、

$$p_3 = \left( \frac{KM}{KM+V} \right)^3 \times p_0 = \left( \frac{0.2 \times 10}{0.2 \times 10 + 3.0} \right)^3 \times p_0 = \left( \frac{2}{5} \right)^3 \times p_0 = 0.4^3 \times p_0 = 0.064 \times p_0$$

元の汚れ度  $p_0$  の 0.064 倍(6.4%)となる。 コサ 64