コンデンサ(センサ) (大学入試センター試験 2011)

年次　　組　　番・氏名

第1問　問1　試料表面の微小な凹凸の計測を行うため、コンデンサを応用したセンサについて考えてみよう。コンデン(図 1(a))の静電容量 C は、電極面積を S、電極間距離を D、電極間の媒質の誘電率を ε とすると、式(1)で表される。ここで ε 、 S は一定である。

$$C = \frac{\varepsilon S}{D} \qquad (1)$$

図 1(b)に示すように、二枚の電極の間にもう一枚電極を挿入すると、二つの直列したコンデンサが形成される。ここで、上下のコンデンサの静電容量をそれぞれ C_1、C_2 と表す。さらに、図 1(c)に示すように、中央の電極を可動式とし、取り付けた探針の上下動にしたがって動くようにした。

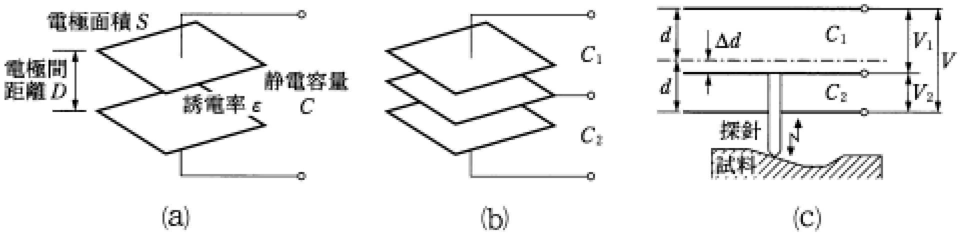

図 1

上下の電極間距離 D を $2d$ に固定し、可動電極がその中心から距離 Δd 移動したとする。このときの C_1、C_2 は式(2)で表される。ただし、下方に電極が移動したときに $\Delta d > 0$ であるとする。

$$C_1 = \varepsilon S\left(\frac{1}{d+\Delta d}\right)、\quad C_2 = \varepsilon S\left(\boxed{\quad ア \quad}\right) \qquad (2)$$

上下の固定電極間に電圧 V を加えると、それぞれのコンデンサの両端にかかる電圧 V_1 と V_2 の関係は

$$V = V_1 + V_2 \qquad (3)$$

となる。それぞれのコンデンサに蓄えられる電荷量 Q は等しいので、

$$Q = C_1V_1 = C_2V_2 \qquad (4)$$

である。式(3)と式(4)を使って、V_1, V_2 を V, C_1, C_2 で表すと、

$$V_1 = \boxed{\quad イ \quad}\ V, \qquad V_2 = \boxed{\quad ウ \quad}\ V \qquad (5)$$

が得られる。したがって、電圧の差 $\Delta V = V_1 - V_2$ は、式(6)で表される。

$$\Delta V = \boxed{\quad エ \quad}\ V \qquad (6)$$

式(2)を式(6)に代入すれば、電圧の差 ΔV と移動した距離 Δd の関係式

$$\Delta d = \frac{d}{V}\Delta V \qquad (7)$$

が得られる。例えば、d =5.0mm、V = 2.0V とすると、電圧の差 ΔV = 4.0mV であれば、探針

が移動した距離は、 オカ μ m と求まる。

図 l(c)は差動式容量センサと呼ばれ、試料表面の微小な凹凸を計測する装置に用いられる。探針を試料に接触させ試料を水平に動かせば、試料表面形状にそって探針が上下し、その結果現れる電圧の差 ΔV の変化から、試料表面の凹凸形状を知ることができる。

ア ～ エ

(0) d　(1) Δd　(2) $\dfrac{1}{d+\Delta d}$　(3) $\dfrac{1}{d-\Delta d}$　(4) $\dfrac{\Delta d}{d-\Delta d}$

(5) $\dfrac{\Delta d}{d+\Delta d}$　(6) $\dfrac{d}{d+\Delta d}$　(7) $\dfrac{d}{d-\Delta d}$　(8) $\dfrac{C_2-C_1}{C_2+C_1}$　(9) $\dfrac{C_2+C_1}{C_2-C_1}$

(a) $\dfrac{C_1}{C_2-C_1}$　(b) $\dfrac{C_2}{C_2-C_1}$　(c) $\dfrac{C_1}{C_2+C_1}$　(d) $\dfrac{C_2}{C_2+C_1}$

解説

式(1)より、電極面積 S と誘電率 ε が一定であれば、静電容量 C は電極間距離 D によって決まる。図 1(c)より、一方の間隔が増えれば、他方の間隔は減る関係にある。C_1 の間隔 D_1 が Δd だけ増えると($D_1 = d+\Delta d$)、C_2 の間隔 D_2 は Δd だけ減る($D_2 = d-\Delta d$)。

$$\mathrm{D} = D_1 + D_2 = (d+\Delta d) + (d-\Delta d) = 2d$$

よって、式(2)の $\boxed{\text{ア}}$ は、$\frac{1}{D_2} = \frac{1}{d-\Delta d}$ となる。　　$\boxed{\text{ア　3}}$

次に、式(3)(4)を使って、V_1, V_2 を求める式(5)を導く。

まず、$\boxed{\text{イ}}$ は式(4)から V_2 を消せばよい。式(3)を変形して $V_2= V-V_1$ を式(4)に代入する。

$$C_1V_1 = C_2V_2$$

$$C_1V_1 = C_2(V-V_1)$$

$$C_1V_1 = C_2V-C_2V_1$$

$$C_1V_1 + C_2V_1 = C_2V$$

$$(C_1 + C_2)V_1 = C_2V$$

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1+C_2}V$$　　$\boxed{\text{イ　d}}$

同じように、V_2 を求める。

$$C_1V_1 = C_2V_2$$

$$C_1(V-V_2) = C_2V_2$$

$$C_2V_2 = C_1V-C_1V_2$$

$$C_2V_2 + C_1V_2 = C_1V$$

$$(C_1 + C_2)V_2 = C_1V$$

$$V_2 = \frac{C_1}{C_1+C_2}V$$　　$\boxed{\text{ウ　c}}$

電圧の差 $\Delta V = V_1-V_2$ は、式(5)を使って求める。

$$V_1 - V_2 = \frac{C_2}{C_1+C_2}V - \frac{C_1}{C_1+C_2}V = \left(\frac{C_2}{C_1+C_2} - \frac{C_1}{C_1+C_2}\right)V = \left(\frac{C_2-C_1}{C_1+C_2}\right)V$$　　$\boxed{\text{エ　8}}$

次に、式(2)を式(6)に代入すれば、電圧の差 ΔV と移動した距離 Δd の関係式(7)が得られる。式(7)は問題に示されているが、導いてみよう。

$$C_1 = \varepsilon S\left(\frac{1}{d+\Delta d}\right)、C_2 = \varepsilon S\left(\frac{1}{d-\Delta d}\right) \quad (2)、\quad \Delta V = \frac{C_2-C_1}{C_1+C_2}V \quad (6)$$

$$\Delta V = \frac{C_2-C_1}{C_1+C_2}V = \frac{A}{B}V$$　とする。

$$A = C_2 - C_1 = \varepsilon S\left(\frac{1}{d-\Delta d}\right) - \varepsilon S\left(\frac{1}{d+\Delta d}\right) = \varepsilon S\left(\frac{1}{d-\Delta d} - \frac{1}{d+\Delta d}\right)$$

$$= \varepsilon S\left(\frac{d+\Delta d-(d-\Delta d)}{(d-\Delta d)(d+\Delta d)}\right) = \varepsilon S\left(\frac{2\Delta d}{(d-\Delta d)(d+\Delta d)}\right)$$

$$B = C_1 + C_2 = \varepsilon S\left(\frac{1}{d+\Delta d}\right) + \varepsilon S\left(\frac{1}{d-\Delta d}\right) = \varepsilon S\left(\frac{1}{d+\Delta d} + \frac{1}{d-\Delta d}\right)$$

$$= \varepsilon S\left(\frac{d+\Delta d+d-\Delta d}{(d-\Delta d)(d+\Delta d)}\right) = \varepsilon S\left(\frac{2d}{(d-\Delta d)(d+\Delta d)}\right)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\varepsilon S\left(\frac{2\Delta d}{(d-\Delta d)(d+\Delta d)}\right)}{\varepsilon S\left(\frac{2d}{(d-\Delta d)(d+\Delta d)}\right)} = \frac{\varepsilon S(2\Delta d)}{\varepsilon S(2d)} = \frac{\Delta d}{d}$$

よって、式(7)は次の通りとなる。

$$\Delta V = \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}V = \frac{A}{B}V \quad \text{より、} \Delta V = \frac{\Delta d}{d}V \ \rightarrow \ \Delta V\, d = V\, \Delta d \ \rightarrow \ \Delta d = \frac{d}{V}\Delta V \qquad (7)$$

d =5.0mm、V = 2.0V、$\varDelta V$ = 4.0mV のときの探針が移動した距離 $\varDelta d$ を求める。式(7)より次の通りとなる。

$$\Delta d = \frac{d}{V}\Delta V = \frac{5.0}{2.0} \times 4.0 \times 10^{-3} = 10.0 \times 10^{-3}(\mathrm{mm})$$

$$1\mathrm{m} = 1 \times 10^3\mathrm{mm} = 1 \times 10^6\mathrm{\mu m} \quad \text{より}$$

$$= 10.0 \times 10^{-3} \times 10^3 = 10.0\ \mathrm{\mu m} \qquad \boxed{\text{オカ}\quad 10}$$