片持ちばり（梁） (大学入試センター試験 2011)

年次　　組　　番・氏名

第 1 問　問 2　構造物の設計では、構造物そのものに作用する重力(自重)を考慮しなければならない。図 2 のような、一端を壁に埋め込んだ形のはり(片持ばり)に自重のみが作用する場合を考えてみよう。図 2 の点 A で曲げモーメントが最大となるので、ここが壊れないように、はり断面の設計をする必要がある。

重力加速度 g[m/s^2]、材料密度 ρ [kg/m^3]、はり幅 b[m]、はりせい(断面の高さ方向の長さ)h[m]とする。自重は一様に分布する荷重(等分布荷重)として表され、はりの単位長さ当たりの荷重 w[N/m]は次式のようになる。

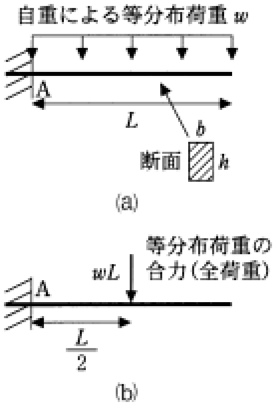

図 2

$$w = \rho gbh \qquad (8)$$

はりの長さを L[m]とすると、点 A の曲げモーメントの大きさ M_A[N・m]は、自重の合力(全荷重)wL[N]が、はりの中央に作用していると考えられるので、次のようになる。

$$M_A = \boxed{\text{キ}} \times w \qquad (9)$$

キ				
	(0) $\frac{L}{2}$	(1) $\frac{L^2}{2}$	(2) $\frac{L}{4}$	(3) $\frac{L^2}{4}$

点 A の曲げ応力(曲げによって生じる力) σ_A[Pa]は、断面係数(断面形状の性質を表す係数) $Z = \frac{bh^2}{6}$ を用いて次の式で表される。

$$\sigma_A = \frac{M_A}{Z} = \frac{6}{bh^2} \times M_A \qquad (10)$$

式(8)～式(10)から次式が得られる。

$$\sigma_A = \boxed{\text{ク}} \qquad (11)$$

ク				
	(0) $\frac{3\rho gbL}{2h}$	(1) $\frac{3\rho gL^2}{2h}$	(2) $\frac{3\rho gbL}{h}$	(3) $\frac{3\rho gL^2}{h}$

式(11)から、はりの形状と曲げ応力との関係を考えてみよう。点 A の曲げ応力が等しくなるようにして、同一の材料を用いて 2 倍の長さのはりを作製するためには、4 倍の $\boxed{\text{ケ}}$ が必要になる。 $\boxed{\text{コ}}$ は点 A の曲げ応力には影響しない。

ケ・コ			
(0) はりせい	(1) はりの長さ	(2) はり幅	(3) 材料密度

コンクリートを用いて、長さ L=10m の片持ばりを作製するために必要なはりせいを求めよう。コンクリートの密度と曲げ強度は表 1 のとおりである。重力加速度 g = 9. 8 m/s^2 とする。 σ_A が材料の曲げ強度 σ [Pa]に一致するときのはりせいは、

$h = \boxed{\text{サ}}\,.\,\boxed{\text{シ}} \times 10^{\boxed{\text{ス}}}$ cm となる。

表 1　コンクリートの密度と曲げ強度

密度 ρ [kg/m^3]	2.4×10^3
曲げ強度 σ [Pa]	2.8×10^6

解説

点 A の曲げモーメントの大きさ M_A[N・m]は、「全荷重×荷重までの距離」で求められる。問題より、全荷重は wL[N]、これがはりの中央に作用するから距離は $L/2$[m]となる。

$$M_{\mathrm{A}} = wL \times \frac{L}{2} = \frac{L^2}{2} w \qquad (9) \qquad \boxed{キ\quad 1}$$

点 A の曲げ応力(曲げによって生じる力) σ_A[Pa]は、式(8)～式(10)から次のようになる。

$w = \rho g b h \quad \cdots$ (8) を、$M_{\mathrm{A}} = \dfrac{L^2}{2} w \quad \cdots$ (9) に代入して、$M_{\mathrm{A}} = \dfrac{L^2}{2} \times \rho g b h$ となる。

これを式(10)に代入して求める。

$$\sigma_{\mathrm{A}} = \frac{6}{bh^2} \times M_{\mathrm{A}} = \frac{6}{bh^2} \times \frac{L^2}{2} \times \rho g b h = \frac{3}{h} \times L^2 \times \rho g = \frac{3\rho g L^2}{h} \qquad (11) \qquad \boxed{ク\quad 3}$$

点 A の曲げ応力 σ_A[Pa]は同じで長さを 2 倍にする。元のはりは、長さを L[m]、はりせいを h[m]とする。2 倍のはりは、長さが 2 L[m]、はりせいが h_2[m]とする。これを式(11)に代入して h_2 を求める。

$$\frac{3\rho g L^2}{h} = \frac{3\rho g (2L)^2}{h_2} \quad (= \sigma_{\mathrm{A}})$$

$$\frac{L^2}{h} = \frac{(2L)^2}{h_2}$$

$$\frac{L^2}{h} = \frac{4L^2}{h_2}$$

$$h_2 = 4L^2 \times \frac{h}{L^2}$$

$$h_2 = 4h$$

よって、h_2 は元のはりせいの 4 倍の大きさが必要である。また、式(11)には b(はり幅)はないので、点 A の曲げ応力には影響しない。 $\boxed{ケ\quad 0}$ $\boxed{コ\quad 2}$

長さ L=10m の片持ばりを作製する。g = 9. 8 [m/s^2]、材料密度 ρ =2.4×10^3 [kg/m^3]、点 A の曲げ応力 $\sigma_A = \sigma$ = 2.8×10^6 [Pa]のとき、はりせい h[m]を求める。

$\sigma_{\mathrm{A}} = \dfrac{3\rho g L^2}{h}$ より、$h = \dfrac{3\rho g L^2}{\sigma_{\mathrm{A}}}$ となり、各値を代入して計算する。

$$h = \frac{3\rho g L^2}{\sigma_{\mathrm{A}}} = \frac{3 \times 2.4 \times 10^3 \times 9.8 \times 10^2}{2.8 \times 10^6} = \frac{3 \times 6 \times 10^3 \times 1.4 \times 10^2}{1 \times 10^6} = 25.2 \times 10^{-1}$$

$$h = 2.5 \times 10^0 [\mathrm{m}] = 2.5 \times 10^2 [\mathrm{cm}] \qquad \boxed{サ\quad 2} \quad \boxed{シ\quad 5} \quad \boxed{ス\quad 2}$$