エネルギー (大学入試センター試験 2012)

年次　　組　　番・氏名

第 1 問　円周率は π で表す。

問 1　電力などのエネルギーを貯蔵する装置の一つに、回転する円盤の運動エネルギーとして蓄えるものがあり、 無停電電源などへ応用されている。ここでは、回転円盤に蓄えられるエネルギーについて考えてみよう。

半径 R[m]、一様な厚さ H[m]の円盤が中心軸の周りに角速度 ω [rad/s]で回転している(図 1)。円盤は均質で、その密度を ρ [kg/m^3]とする。円盤の回転に伴う空気抵抗や摩擦は無視できるとする。

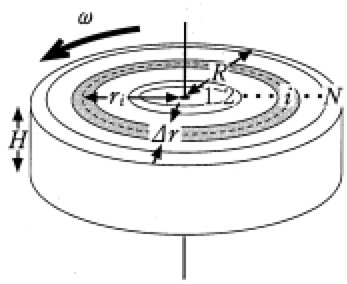

図 1　回転円盤

円盤を N 個の同じ幅 Δr[m]の薄いリングに分割し、その i 番目($1 \leqq i \leqq N$)に着目しよう。リングの幅 Δr の中央から中心軸までの距離をリングの半径 r_i とすると(図 1)、その周速度 v_i[m/s]は $\boxed{\text{ア}}$ となる。リングの体積 V_i[m^3]は、半径が $r_i+\frac{\Delta r}{2}$ の円盤と $r_i-\frac{\Delta r}{2}$ の円盤の体積の差に等しいので、

$$V_i = \pi H\left(r_i+\frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \pi H\left(r_i-\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

となる。式(1)を整理し、密度 ρ を用いると、リングの質量 m_i[kg]は $\boxed{\text{イ}}$ となる。i 番目のリングの運動エネルギーE_i[J]は、v_i と m_i から、

$$E_i = \frac{1}{2}m_i{v_i}^2 = \boxed{\text{ウ}} \times {r_i}^{\boxed{\text{エ}}} \times \Delta r \qquad (2)$$

と計算できる。N 個のリングについて式(2)の和を求め、$N \to \infty$、すなわち、$\Delta r \to 0$ の極限をとると、円盤の運動エネルギーE[J]が得られる。この E に関する計算は、次のように定積分に置き換えて求めることができる。

$$E = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} E_i = \boxed{\text{ウ}} \int_0^R r^{\boxed{\text{エ}}}\, dr = \boxed{\text{ウ}} \times \frac{R^{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{オ}}} \qquad (3)$$

この結果から、より大きなエネルギーを蓄えるには、円盤の角速度や半径を増やすことが効果的と考えられる。

$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ウ}}$	(0) $r_i\omega$	(1) $\frac{r_i\omega}{2}$	(2) $2r_i\omega$	(3) ${r_i}^2\omega$	(4) $\pi\rho H r_i\Delta r$
	(5) $4\pi\rho H r_i\Delta r$	(6) $\dfrac{2\pi H r_i\Delta r}{\rho}$	(7) $2\pi\rho H r_i\Delta r$	(8) $\dfrac{\pi\rho\omega^2 H}{2}$	
	(9) $\pi\rho\omega^2 H$	(a) $2\pi\rho\omega^2 H$	(b) $\dfrac{\pi\omega^2 H}{\rho}$		

解説

円運動で、単位時間当たりに移動した角度が角速度、移動した円周上の距離が周速度となる。半径 r[m]の円周は $2\pi r$[m]で 1 周 360°は 2π[rad]であるから、x[rad]の弧の長さ(距離)は$\frac{2\pi r}{2\pi}\times x = rx$[m]と求められる。例えば、半径 r[m]の円板が 1 秒間に$\frac{\pi}{2}$ [rad](=90°)回転するとき、角速度は$\frac{\pi}{2}$ [rad/s]で、円周の 1/4 を移動したことになるから周速度は$\frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$[m/s]となる。

角速度 ω [rad/s]で回転するとき、半径 r_i の周速度 v_i は、$v_i = r_i\,\omega$ [m/s]となる。 ア　0

i 番目のリングの体積 V_i は、式(1)で求まる。密度を ρ [kg/m^3]としたとき、このリングの質量 m_i は、$m_i = \rho\, V_i$ [kg]となる。V_i に式(1)を代入して計算すると次のようになる。

$$m_i = \rho V_i = \rho\left(\pi H\left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \pi H\left(r_i - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right)$$

$$= \rho\pi H\left(\left(r_i{}^2 + 2r_i\frac{\Delta r}{2} + \frac{\Delta r^2}{4}\right) - \left(r_i{}^2 - 2r_i\frac{\Delta r}{2} + \frac{\Delta r^2}{4}\right)\right)$$

$$= \rho\pi H\left(r_i{}^2 + r_i\Delta r + \frac{\Delta r^2}{4} - r_i{}^2 + r_i\Delta r - \frac{\Delta r^2}{4}\right) = \rho\pi H(2r_i\Delta r) = 2\rho\pi H r_i\Delta r$$

イ　7

運動エネルギーE_iは、式(2)にも示されている通り、$E_i = \frac{1}{2}m_i v_i{}^2$ である。$v_i = r_i\,\omega$ と $m_i = 2\pi\rho H r_i\,\Delta r$ を代入して整理すると次のようになる。

$$E_i = \frac{1}{2}m_i v_i{}^2 = \frac{1}{2}\times 2\pi\rho H r_i\Delta r \times (r_i\omega)^2 = \pi\rho H r_i\Delta r \times r_i{}^2\omega^2 = \pi\rho H\omega^2 \times r_i{}^3 \times \Delta r$$

ウ　9　エ　3

$$E = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} E_i = \pi\rho\omega^2 H \int_0^R r^3\,dr = \pi\rho\omega^2 H \times \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \pi\rho\omega^2 H \times \left(\frac{R^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \pi\rho\omega^2 H \times \frac{R^4}{4}$$

オ　4